



Wintersemester 2001-2002  
Seminar: Graphen in der Grammatik  
Dozent: Prof. Dr. Wolf Thümmel

---

# DIE SEMANTIK DES PFEILS

GRAPHENTHEORIE IN DER SPRACHWISSENSCHAFT

---

**Andreas G. Nie**

---

Gartlager Weg 37

49086 Osnabrück

+49 541 85 00 101

[andreas.nie@uni-osnabrueck.de](mailto:andreas.nie@uni-osnabrueck.de)

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Über diese Arbeit . . . . .	1
1.2	Die Grundbegriffe . . . . .	1
1.2.1	Von Knoten und Kanten . . . . .	2
1.2.2	Von Graphen und n-Ecken . . . . .	2
1.2.3	Von Bäumen und Wäldern . . . . .	2
1.2.4	Richtungsweisend . . . . .	2
1.2.5	Von Wurzeln und deren Bäume . . . . .	3
1.2.6	Sonstiges . . . . .	3
1.3	Zusammenfassung . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Graphentheorie allgemein</b>	<b>4</b>
2.1	Die Anfänge . . . . .	4
2.2	Die Entwicklung . . . . .	4
2.3	Aktuelle Einsatzfelder . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Graphentheorie und Sprachwissenschaft</b>	<b>5</b>
3.1	Konstituentengrammatik . . . . .	5
3.2	Automaten . . . . .	6
3.3	Theorie des Artikulators . . . . .	6
3.4	Zusammenfassung . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Graphentheorie in der Anwendung</b>	<b>7</b>
4.1	Wurzelbaum gemäß der Konstituentengrammatik . . . . .	7
4.2	Endlicher Automat . . . . .	8
4.3	Flussdiagramm 'Google' . . . . .	8
4.4	Zusammenfassung . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Schlussbemerkung</b>	<b>10</b>
	<b>Literatur</b>	<b>10</b>

# 1 Einleitung

Ein Bild sagt mehr als tausend Worte. In Zeiten des Fernsehens nehmen Bilder eine immer prominentere Rolle in unserem Leben ein. Auch die Wissenschaft bedient sich gerne visueller Mittel, um Sachverhalte darzustellen. Statistiken und Messergebnisse werden in Diagramme und Graphen verpackt, um einen leichten Zugang zu den Daten zu ermöglichen. Die Graphen nehmen dabei aber nicht nur eine rein darstellerische Form an, sondern sind manchmal sogar Analysemittel.

Die vorliegende Arbeit soll einen Einblick in die Graphentheorie geben, die hinter dieser Darstellungsform steht. Dabei wird insbesondere ihre Verwendung in der Sprachwissenschaft behandelt. Bevor aber ein Blick auf die Sprachwissenschaft in Kapitel 3 geworfen werden kann, will ich einige Aspekte vorweg ansprechen.

In der Einleitung sollen Grundbegriffe der Graphentheorien vorgestellt werden. Dabei wird explizit auf eine mathematische Definition verzichtet, um einen einfachen Einstieg in die Materie zu ermöglichen.

Im 2. Teil wird die Graphentheorie im allgemeinen behandelt. Ein kurzer Blick in die Geschichte wird die Entwicklung aufzeigen. Zudem werden einzelne Anwendungsbereiche, in denen Graphen verwendet werden, vorgestellt.

Wie Graphentheorie in der Sprachwissenschaft benutzt wird, zeige ich in Kapitel 3.

Schließlich wird anhand einiger Graphen im 4. Kapitel eine Analyse betrieben. Die Beispiele sind aus verschiedenen Bereichen entnommen und zeichnen sich durch unterschiedliche Merkmale aus, die miteinander verglichen werden.

## 1.1 Über diese Arbeit

Im folgenden werden die für die Graphentheorie relevanten Begriffe kurz vorgestellt und definiert. Da die Graphentheorie ihre Wurzeln in der Mathematik hat, finden sich in der einschlägigen Literatur meist entsprechende Definitionen. Um einen leichteren Zugang zur Materie zu gewähren, werde ich die wichtigsten Termini umgangssprachlich vorstellen. Ziel ist es, eine Grundvoraussetzung für die Diskussion im vierten Kapitel zu schaffen. Als Grundlage für die Erklärungen dienen die Definitionen im Skript „Graphentheorie in der Linguistik“<sup>1</sup> zum Seminar, die mathematisch korrekt formuliert sind.

Trotz des hoffentlich einfachen Zugangs zur Graphentheorie, ist ein mathematisches Grundwissen, insbesondere in der Mengentheorie, weiterhin Voraussetzung für das Verständnis, da eine weitergehende Einführung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

## 1.2 Die Grundbegriffe

Der folgende Abschnitt stellt die wichtigsten Grundbegriffe in der Graphentheorie vor. Natürlich umfasst diese Einführung nicht alles, was in der Wissenschaft an Begrifflichkeit benutzt wird, sondern beschränkt sich vielmehr auf das für die vorliegende Arbeit Notwendige.

---

<sup>1</sup>vgl. [Thü01]

### 1.2.1 Von Knoten und Kanten

Im Grunde reduziert sich die Graphentheorie auf drei Mengen: Knoten, Kanten und Relationen. In der Regel werden für die ersten zwei keine Definitionen gegeben. Sie werden vielmehr als bekannt vorausgesetzt. Knoten (oder Punkte) können als Objekte gesehen werden, wohingegen Kanten als Beziehungen zwischen den Objekten verstanden werden. Welche Knoten mit welchen anderen Knoten in Beziehung stehen, regeln die Relationen.

### 1.2.2 Von Graphen und n-Ecken

Der einfachste aller Graphen ist der *leere Graph*. Er hat keine Knoten oder Kanten und braucht deshalb auch keine Relationen. Als nächstes kommt ein Graph mit einem Knoten aber ohne Kanten, der *trivialer Graph* genannt wird. Auch hier braucht es keine Relationen. Allerdings werden sie benötigt, sobald ein Graph mindestens eine Kante und mindestens einen Knoten besitzt. Die Relationen beschreiben dann, welche Kante mit welchen Knoten verbunden sind. Eine Kante darf nicht allein stehen sondern muss an ihren zwei Enden immer einen Knoten vorweisen, selbst wenn der Graph nur einen Knoten hat. In einem Graph mit einer Kante und einem Knoten beginnt und endet die Kante in dem einzig vorhandenen Knoten. Eine solche Kante wird auch *Schlinge* genannt.

Besitzt ein Graph mehrere Knoten und Kanten, können sich sogenannte *n-Ecke* bilden. Ein *n-Eck* entsteht immer dann, wenn eine Verbindung zu ein und dem selben Knoten über mindestens eine Kante hinweg besteht, ohne dass eine Kante zweimal benutzt wird. Ein solches *n-Eck* ist die bereits oben vorgestellte Schlinge, die somit auch *1-Eck* genannt wird, da in ihr ein Knoten (also  $n=1$ ) enthalten ist. Ein *2-Eck* hat folglich zwei Knoten und außerdem zwei Kanten, da eine Kante kein zweites Mal benutzt werden darf. Diese Konfiguration wird auch *Mehrfachkante* genannt. Sobald drei oder mehr Stationen in einem *n-Eck* auftauchen, wird von einem *Kreis* gesprochen.

### 1.2.3 Von Bäumen und Wäldern

In der Beschreibung eines Graphen weiter oben ist die Möglichkeit ausgeschlossen worden, dass einzelne Kanten separat für sich stehen dürfen. Allerdings gilt dies nicht für Knoten. Sie müssen nicht an eine Kante angeschlossen sein. Ein Graph mit mindestens einem allein stehenden Knoten, der aber zusätzlich kein *n-Eck*, also keine Schlingen, Mehrfachkanten oder Kreise enthält, wird *Wald* genannt.

Ein *Baum* unterscheidet sich von einem Wald insofern, dass es keine einzeln stehende Knoten geben darf. Jeder Knoten ist Teil des Geflechts und steht am Ende von mindestens einer Kante. Wie beim Wald dürfen auch im Baum keine *n-Ecken* auftreten.

### 1.2.4 Richtungsweisend

Die beschriebenen Graphen sind bis jetzt nur eine Ansammlung von Punkten und Kanten. Allerdings kann in ihnen, wenn sie auf ein Blatt Papier gezeichnet werden,

noch keine Richtung abgelesen werden<sup>2</sup>. Kein Knoten ist der Start- oder Endknoten einer Kante, da es keine Richtungspfeile gibt, die festlegen, wo eine Kante beginnt oder endet. Deshalb werden die bis jetzt beschriebenen Graphen als *ungerichtet* bezeichnet.

Wird aus jeder Kante im Graph ein Pfeil mit einer eindeutigen Richtung (also kein Doppelpfeil), heißt der Graph *gerichtet*. Der Knoten am Pfeilanfang heißt dann *Startknoten* und der Knoten an der Spitze *Zielknoten*.

### 1.2.5 Von Wurzeln und deren Bäume

Als *Wurzel* wird ein Knoten bezeichnet, von dem aus mindestens ein Pfeil abgeht, in dem aber kein Pfeil endet. Umgekehrt heißen Knoten, in denen Pfeile enden, aber von denen keine Pfeile abgehen, *Finalknoten* oder auch *Blätter*.

Ein Baum mit einer Wurzel wird auch *Wurzelbaum* genannt. Oftmals ist der Wurzelbaum das, was viele Autoren meinen, wenn sie allgemein von Bäumen sprechen. Die hier gewählten Definitionen für Bäume und Wurzelbäume sind aus dem Skript „Graphentheorie in der Linguistik“ von Wolf Thümmel übernommen, wo eine Unterscheidung zwischen gerichteten Bäumen und ungerichteten Wurzelbäumen gemacht wird. Das Skript zur Computerlinguistik der Humboldt-Universität Berlin hingegen meint einen Wurzelbaum im Thümmel'schen Sinne, wenn dort von Baum<sup>3</sup> die Rede ist.

### 1.2.6 Sonstiges

Alle Graphen, die beschrieben wurden, haben gemeinsam, dass allein durch die Angabe der Knoten und Kanten die visuelle Darstellung nicht definiert ist. Ein Graph mit mehreren Kanten und Knoten lässt sich auf verschiedene Arten darstellen. Zwei Personen können unterschiedliche Graphen zeichnen, die per Definition gleich sind und dennoch unterschiedlich aussehen.

Außerdem wird im folgenden davon ausgegangen, dass *endliche Graphen* gemeint sind, wenn von Graphen die Rede ist. Endliche Graphen haben eine begrenzte (abzählbare) Anzahl von Knoten und Kanten und lassen sich vollständig darstellen, im Gegensatz zu *unendlichen Graphen*, die zeichnerisch nur angedeutet werden können.

## 1.3 Zusammenfassung

Die obigen Definitionen geben ein Grundgerüst, welches für den Mathematiker vielleicht zu unpräzise ausgedrückt ist. Dennoch sollen sie an dieser Stelle reichen, um einen ersten Schritt in die Begrifflichkeit zu schaffen. Wer sich tiefer mit der Materie beschäftigt, wird auf weitere Begriffe stoßen, die Einzelfälle weiter differenzieren, Möglichkeiten erweitern oder genauere Rahmenbedingungen definieren. Die hier erklärten Begriffe helfen dabei, einen leichteren Einstieg zu bekommen.

Im nächsten Kapitel gehe ich auf die Geschichte der Graphentheorie ein. Von den Anfängen ausgehend soll die Entwicklung und der zunehmende Einsatz auf-

---

<sup>2</sup>Vorausgesetzt die Hierarchie wird nicht als Richtung interpretiert

<sup>3</sup>vgl. [Kun01], Seite 35

gezeigt werden, bevor in Kapitel 3 näher auf die sprachwissenschaftliche Verwendung der Graphentheorie eingegangen wird.

## 2 Graphentheorie allgemein

Graphentheorie wird als Teil der diskreten Mathematik gesehen, zu der auch die Logik oder die Mengenlehre gehören. Lag sie anfangs etwas abseits so ist sie mittlerweile zu einem wichtigen Hilfsmittel z.B. in der Theorie der mathematischen Relationen<sup>4</sup> geworden. Im folgenden soll auf die Entstehung und Entwicklung der Graphentheorie eingegangen werden<sup>5</sup>.

### 2.1 Die Anfänge

Allgemein wird der Schweizer Ausnahmewissenschaftler Leonhard Euler (1707-1783) als Begründer der Graphentheorie gesehen. 1736 veröffentlichte er sein 'Königsberger Brücken' Problem, in dem er versuchte, einen Rundweg durch die Stadt Königsberg zu finden ohne dabei eine der sieben Brücken zweimal passieren zu müssen. Am Ende des Rundganges sollte sich ein Spaziergänger am Ausgangspunkt wiederfinden. Euler zeigte durch die Übertragung des Königsberger Stadtplanes in einen Graph, dass es einen solchen Weg nicht gibt.

Im 18. Jahrhundert beschäftigten sich die Mathematiker Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) und Thomas Penyngton Kirkman (1806-1895) mit einem Problem, das in den 1930ern als 'Traveling Salesman' Problem eine allgemeinere Behandlung fand. Es galt den kürzesten Weg zwischen einer bestimmten Anzahl an Städten zu finden, ohne durch eine Stadt mehr als einmal reisen zu müssen.

Ein weiteres prominentes Beispiel aus der Graphentheorie ist das Vier-Farben-Problem. 1852 stellten sich Frederick und Francis Guthrie die Frage, ob es möglich ist, eine Landkarte mit höchstens vier Farben einzufärben, so dass kein benachbartes Land die gleiche Farbe hat. Dieses Problem brachte einen enormen Schub in der Graphentheorie.

### 2.2 Die Entwicklung

Obwohl die Aufgabe des Vier-Farben-Problems simpel erscheint, ist es erst am Ende des zwanzigsten Jahrhunderts mit moderner Computertechnologie gelungen, einen Beweis zu erbringen, dass vier Farben tatsächlich ausreichen<sup>6</sup>. Auch mit dem 'Traveling Salesman' Problem beschäftigen sich die Wissenschaftler noch heute. Computerprogramme waren 2001 in der Lage, eine Route für 15,112 deutsche Städte zu berechnen<sup>7</sup>.

Aber nicht nur das Vier-Farben-Problem oder das 'Traveling Salesman' Problem brachte die Graphentheorie weiter. Der ungarische Mathematiker Dénes König (1884 - 1944) veröffentlichte 1936 in seinem Buch „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen“ eine erste systematische Darstellung in diesem Gebiet<sup>8</sup>.

---

<sup>4</sup>vgl. Einleitung in [Ore74]

<sup>5</sup>s.a. [NS96] für eine tiefer gehende Einführung

<sup>6</sup>Der Beweis von 1996 reduziert die Fälle, die vom Beweis nicht erfasst werden, auf 633. Diese wurden mit einem Computer durch 'Ausprobieren' ebenfalls bewiesen. Vgl. [Wik02]

<sup>7</sup>vgl. [Web02]

<sup>8</sup>vgl. [Sed72]

Dieses Werk löste eine wahre Begeisterung für die Graphentheorie aus, so dass bald weitere Werke anderer Autoren erschienen.

Allerdings hatte die Graphentheorie bereits in andere naturwissenschaftliche Gebiete Einzug erhalten. So fand sie z.B. in der Darstellung elektrischer Netze durch den Physiker Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) eine passende Anwendung sowie beim Zeichnen chemischer Moleküle, wie es von Friedrich August Kekulé (1829-1896) eingeführt wurde.

## 2.3 Aktuelle Einsatzfelder

Heutzutage findet die Graphentheorie in vielen Feldern ihre Anwendung. Zum einen hilft sie bei der Analyse und dem Aufbau von Stromnetzen und Schaltkreisen oder im Umgang mit graphischen Darstellungen von Molekülen. Darüber hinaus kommt sie aber auch in der Programmierung von Computerprogrammen als Flussdiagramme und Abfolgeschemata zum tragen. Gerade bei der Entwicklung neuer Sortieralgorithmen oder im Umgang mit Datenbankstrukturen werden Bäume erfolgreich eingesetzt. Ferner werden mit ihrer Hilfe Transportprobleme gelöst, in denen Güter möglichst kosteneffizient von einem Punkt zum nächsten transportiert werden.

Die Graphentheorie wird zudem intuitiv verwendet, um Daten und Abfolgen zu visualisieren. So wird sie bei der Darstellung von Stammbäumen ebenso genutzt wie bei den Diagrammen unzähliger Publikationen.

Auch wenn die Graphentheorie nur langsam ihren Einzug in die wissenschaftliche Welt gefunden hat, ist sie dennoch fester Bestandteil in vielen Disziplinen geworden. Inwieweit sich speziell die Sprachwissenschaft der Methoden und Möglichkeiten der Graphentheorie bedient, werde ich im folgenden Kapitel darstellen.

## 3 Graphentheorie und Sprachwissenschaft

In der Sprachwissenschaft ist der Einsatz der Graphentheorie sehr verbreitet, auch wenn er oftmals intuitiv geschieht. Wolf Thümmel macht in seinem Skript „Graphentheorie in der Linguistik“ darauf aufmerksam, dass sich bereits 1832 Baumstrukturen als Mittel syntaktischer Analysen finden lassen.

Seit dieser Zeit hat sich die Verwendung weiterentwickelt und ist sogar fester Bestandteil einiger Theorien geworden. In den nächsten Unterkapiteln möchte ich auf Konstituentengrammatiken, Automaten und die Theorie des Artikulators kurz eingehen. Es soll gezeigt werden, dass diese Ansätze die Graphentheorie als wichtigen Teil in ihren Beschreibungen aufgenommen haben.

### 3.1 Konstituentengrammatik

In der Konstituentengrammatik (auch Phasenstrukturgrammatik genannt) wird ein Satz in Konstituenten zerteilt, um die Struktur des Satzes zu erfassen. Konstituenten sind logische Einheiten in einem Satz, die wieder Teil größerer Einheiten sind. Durch diese Aufteilung entstehen Dominanzbeziehungen zwischen den einzelnen Konstituenten, die sich hierarchisch in einer Baumstruktur abbilden lassen können. Der Beispielsatz „Der Professor hält einen Vortrag“<sup>9</sup> zerfällt in eine Nominalphrase

---

<sup>9</sup>vgl. *Konstituentenanalyse* in [Buß90]

und eine Verbalphrase die wiederum in die Teile Determinator, Nomen und Verb zerfallen. In Kapitel 4.1 findet sich ein entsprechender Graph und seine genauere Betrachtung.

Wenn bei der Analyse des Baumes eine projektive Struktur gefunden werden kann, also wenn sich ein Baum ergibt, dessen Kanten sich nicht kreuzen, so kann die Struktur auch in einen Klammersatz überführt werden. Der obige Beispielsatz würde dann in der Klammerung folgendermaßen aussehen:

$$[[[\text{Der}]_{DET} [\text{Professor}]_N]_{NP} [[\text{hält}]_V [[\text{einen}]_{DET} [\text{Vortrag}]_N]_{NP}]_{VP}]_S$$

Diese Strukturen werden besonders in der Computerlinguistik verwendet, wo sie helfen, automatische Satzanalysen zu ermöglichen

Ähnliche Verwendung für die Graphentheorie wie die Konstituentengrammatik findet die Dependenzgrammatik. Auch hier werden Satzteile in Bäumen hierarchisch organisiert.

### 3.2 Automaten

Gerade in der Phonologie und in der Morphologie werden sogenannte endliche Automaten verwendet, um Daten zu analysieren. Endliche Automaten sind theoretische Gebilde, die sich aus fünf Teilen zusammensetzen: eine endliche Menge an Zuständen, ein endliches Eingabealphabet, einem Startzustand, mindestens einem Endzustand und einer Übergangsfunktion, die von einem zum nächsten Zustand führt.

Analog zur Konstituentengrammatik, bei der es ja auch einen Startpunkt (die Baumwurzel) und mehrere Zustände (die Knoten) gibt, können endliche Automaten graphisch dargestellt werden. Allerdings sind diese Graphen meist nicht in Baumform darstellbar und verlangen darüber hinaus nach einer anderen Interpretation der Kanten und Knoten. Ein Beispiel für einen Automaten werde ich in Kapitel 4.2 vorstellen.

Da sich Automaten gut zur Implementation als Computerprogramme eignen, werden sie oftmals herangezogen, wenn es um computergestützte Sprachverarbeitung und -analyse geht. Neben den endlichen Automaten gibt es noch Transducer und Turingmaschinen, die einem ähnlichen Prinzip folgen, sich jedoch in ausgewählten Punkten unterscheiden und somit in unterschiedlichen Gebieten eingesetzt werden.

### 3.3 Theorie des Artikulators

Die von Blanche-Noel Grunig begründete Theorie des Artikulators versucht, syntaktische Strukturen verschiedener Grammatiken in Einklang zu bringen. In einer Weiterentwicklung dieser Theorie in „Eine graphentheoretische Darstellung der Theorie des Artikulators“<sup>10</sup> durch Wolf Thümmel mit Helmar Gust ist dabei der Versuch unternommen worden, die Theorie des Artikulators in ihrer Gänze mit Hilfe der Graphentheorie zu beschreiben.

Kern der Theorie sind die sogenannten Artikulatoren, die aus einer Integrationsstruktur und mehreren Alternaten bestehen. Dabei stellt die Integrationsstruktur (ein Wurzelgraph entstanden aus einer zu untersuchenden Grammatik) die Ba-

---

<sup>10</sup>vgl. [Thü]

sis für die Alternaten dar, die wiederum Teilbäume der Integrationsstruktur enthalten. Weiterhin gibt es in den Alternaten eine Menge an Paaren, die verschiedene der enthaltenen Teilbäume miteinander verbindet.

Ziel ist es, Grammatiktheorien auf ihre Korrektheit zu überprüfen. Dafür gibt es eine Reihe von bewiesenen Bedingungen, die in den Alternaten erfüllt sein müssen. Da sich diese Theorie in der Ausarbeitung von Wolf Thümmel stark auf Bäume stützt, macht sie großen Gebrauch von der Graphentheorie.

### 3.4 Zusammenfassung

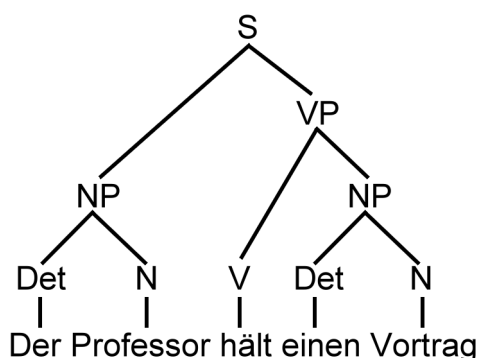
In der Sprachwissenschaft ist die Graphentheorie in manchen Gebieten als fester Bestandteil ausgeprägter Theorien zu finden. Sie hilft aber auch, verschiedene Beziehungen und Daten abzubilden, z.B. bei der Darstellung von Sprachfamilien in Stammbäumen. Auch wenn diese Art der Verwendung von Graphentheorie meist intuitiv und ohne großen theoretischen Hintergrund (zumindest was die graphische Darstellung angeht) geschieht, ist ihr Einsatz dennoch weit verbreitet.

Im folgenden Kapitel möchte ich an ausgewählten Beispielen auf einige Graphen eingehen.

## 4 Graphentheorie in der Anwendung

In den folgenden Unterkapiteln werde ich drei konkrete Beispielgraphen vorstellen und an ihnen einige graphentheoretische Merkmale diskutieren. Dabei geht es nicht so sehr um den Inhalt der Graphen, sondern vielmehr um die Form. Die Auswahl ist deshalb gemischt: ein Wurzelbaum im Sinne der Konstituentengrammatik, ein endlicher Automat und ein Diagramm aus einem Vortrag.

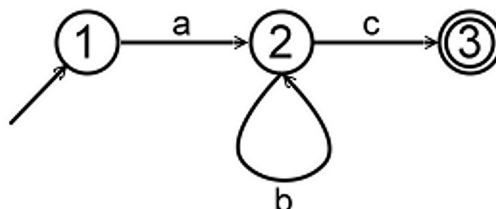
### 4.1 Wurzelbaum gemäß der Konstituentengrammatik



Der vorliegende Graph hat 14 Knoten und 13 Kanten, wobei nur die Kanten beschriftet sind. Da an den Kanten keine Pfeile sind, handelt es sich um einen ungerichteten Graph. Allerdings suggeriert die Ordnung, in der er abgebildet ist, einen Fluss von oben nach unten. Wird von dieser implizierten Richtung ausgegangen, so wird aus dem Knoten mit der Bezeichnung 'S' die Wurzel, da von ihm alle Kanten ausgehen, im Gegenzug keine bei ihm enden. Die fünf Knoten, deren Bezeichnung von links nach rechts gelesen den Satz 'Der Professor hält einen

Vortrag' ergeben, können dann als Finalknoten bezeichnet werden. Dieser Graph stellt insgesamt einen (implizit) gerichteten Wurzelbaum dar.

## 4.2 Endlicher Automat

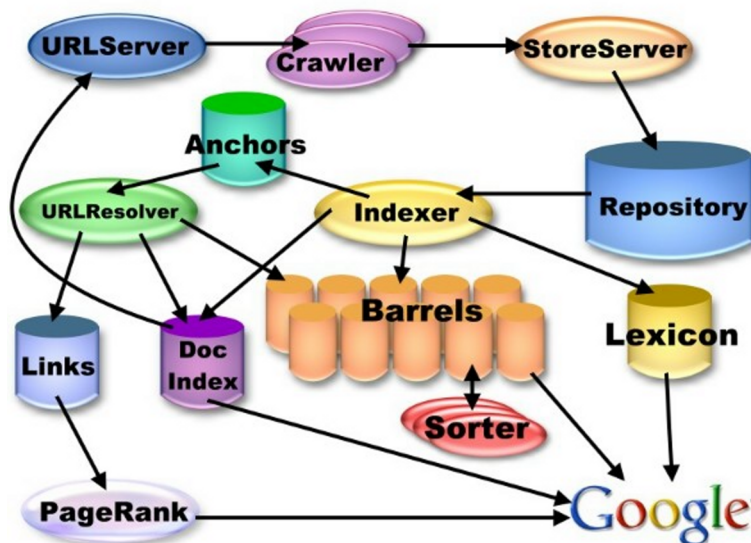


Dieser Graph soll einen einfachen Automaten darstellen, der eine Zeichenkette erlaubt, die mit einem 'a' beginnt, beliebig viele 'b's enthält und mit einem 'c' abschließt. Er besitzt 3 beschriftete Knoten und drei beschriftete Kanten. Die Knoten sind auf zweifache Art beschriftet. Zum einen sind sie nummeriert, zum anderen unterscheiden sie sich in ihrer Darstellung: Knoten '1' ist ein Startzustand (verdeutlicht durch eine 'verstümmelte' Kante, die aber zu der Beschriftung gehört und deshalb nicht zu den anderen Kanten dazugezählt werden kann), '2' ein Übergangszustand und '3' der Endzustand, symbolisiert durch den Doppelkreis.

Die drei Kanten sind ebenfalls beschriftet. An ihnen kann abgelesen werden, welches Zeichen einen Zustandswechsel erlaubt. Da die Kanten Pfeile besitzen, handelt es sich um einen gerichteten Graph. Mit einer Wurzel '1' und dem Finalknoten '3' könnte dieser Graph ein Baum, sogar ein Wurzelbaum sein, allerdings ist die Kante 'b' eine Schlinge. Da in Bäumen keine n-Ecke erlaubt sind, kann dieser Automat nur als gerichteter Graph identifiziert werden.

## 4.3 Flussdiagramm 'Google'

Aus einem Vortrag über die Internetsuchmaschine 'Google' ist der letzte Graph entnommen. Auch wenn dieser Graph auf den ersten Blick offensichtlich anders aussieht als die ersten zwei Beispiele lässt er sich dennoch mit graphentheoretischen Mitteln beschreiben.



In dem Graph gibt es 14 Knoten und 19 (bzw 20; s.u.) Kanten. Keine der Kanten ist beschriftet, dafür haben alle Pfeile, es handelt sich also um einen gerichteten Graph. Zwischen den Knoten 'Barrels' und 'Sorter' gibt es einen Doppelpfeil, der eine darstellerische Abkürzung für zwei Pfeile (einen in jede Richtung) ist und eine Mehrfachkante impliziert. Wird diese Kante zweifach gewertet, besitzt der Graph nicht 19 sondern 20 Kanten.

Die Knoten sind ähnlich wie im Automaten mehrfach beschriftet: jedem Knoten ist ein Wort zugeordnet, und jeder Knoten besitzt eine eigene Farbe. Darüber hinaus gibt es drei verschiedene Formen: die ovalen Knoten stellen Programme oder Programmteile dar, die 'Tonnen' Datenbankcontainer und das bunte Wort 'Google' schließlich das Suchmaschineninterface.

Aufgrund der Kante vom 'Doc Index' zum 'URLServer' handelt es sich bei dem Flussdiagramm nicht um einen Baum. Die Pfeile machen aus dem Bild lediglich einen gerichteten Graph. Allerdings stellt die mangelnde Beschriftung der Kanten ein nicht unerhebliches Problem bei der Interpretation der Grafik dar. Da sie im Grunde alle (mit Ausnahme der bereits erwähnten Mehrfachkante) gleich aussehen, ist nicht geklärt, welche Beziehung zwischen den einzelnen Komponenten herrscht. Welche Art Daten werden übergeben? Geschehen die Abläufe gleichzeitig oder nacheinander? Können die Datencontainer ihre Daten selbständig an die folgenden Programme leiten oder holen sich die Programme selbst die erforderlichen Daten? Diese Fragen bleiben ungeklärt und können ohne weitere Informationen nicht geklärt werden.

#### 4.4 Zusammenfassung

Mit den drei Beispielen habe ich aufgezeigt, dass es unterschiedliche Gebiete gibt, in denen Graphen verwendet werden. Dabei werden die Möglichkeiten der Graphentheorie unterschiedlich stark genutzt: sind bei den Wurzelbäumen der Konstituentengrammatik und bei den Automaten ein hoher Grad an Formalisierung involviert, so ist das Flussdiagramm aus dem Vortrag eher intuitiver Natur.

## 5 Schlussbemerkung

Die vorliegende Arbeit hat einen ersten Einblick in die Graphentheorie gegeben. Seit ihren Anfängen hat sie eine große Entwicklung durchgemacht. Wer sich mit der theoretischen Sprachwissenschaft, insbesondere mit den unterschiedlichen Ansätzen der Grammatiken, beschäftigt, begegnet ständig Graphen. Aber auch über die theoretische Sprachwissenschaft hinaus werden immer wieder Graphen benutzt, um Sachverhalte darzustellen.

Schließlich zeigt das Beispiel aus dem 'Google' Vortrag, dass ein wenig Sorgfalt und Sachverstand bei der Erstellung von Graphen nicht nur in der Sprachwissenschaft sehr hilfreich sein kann. Die ungeklärte Semantik der Pfeile könnte vermieden werden, wenn von vornherein eine klare Definition aller Teile eines Graphen zurecht gelegt werden würde.

## Literatur

- [Buß90] BUSSMANN, Hadumod: *Lexikon der Sprachwissenschaft*. 2. Stuttgart : Alfred Kröner Verlag, 1990
- [Kun01] KUNZE, Jürgen: Computerlinguistik. Skript. 2001. – [http://www2.hu-berlin.de/compling/Lehrstuhl/Skripte/Computerlinguistik\\_1/index.html](http://www2.hu-berlin.de/compling/Lehrstuhl/Skripte/Computerlinguistik_1/index.html)
- [NS96] NÄGLER, Günter ; STOPP, Friedmar: *Graphen und Anwendungen*. Stuttgart, Leipzig : B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1996 (Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler)
- [Ore74] ORE, Oystein: *Graphen und ihre Anwendungen*. 1. Stuttgart : Ernst Klett Verlag, 1974 (Klett Studienbücher)
- [Sed72] SEDLÁČEK, Jiri: *Einführung in die Graphentheorie*. 2. Zürich, Frankfurt/Main : Harri Deutsch, 1972
- [Thü] THÜMMEL, Wolf: Eine graphentheoretische Darstellung der Theorie des Artikulators. – unveröffentlichter Artikel
- [Thü01] THÜMMEL, Wolf. Graphentheorie in der Linguistik. Skript. Dez. 2001
- [Web02] WEBMASTER, Princeton: Milestones in the Solution of TSP Instances. Webseite. März 2002. – <http://www.math.princeton.edu/tsp/milestone.html>
- [Wik02] WIKIPEDIA, Onlinelexikon: Vier-Farben-Problem. Webseite. September 2002. – <http://de.wikipedia.org/wiki/Vier-Farben-Problem>